数学分析（Ⅰ）短课程 [Part 4]

数学分析选讲

孙 伟

华东师范大学数学系算子代数中心

Week 2 to 18. Fall 2014

7. 数学分析选讲

根据课堂之建议，我们这里选讲数学分析中涉及的如下内容：Cauchy准则、一致连续等。

柯西准则（ Cauchy Criterion ）

柯西准则是一个关于判断数列收敛的准则。具体的说，对于 $\mathbb{R}$ 中的数列 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ ，该数列是收敛的当且仅当对于任意的 $\epsilon > 0$ ，存在 $N \in \mathbb{N}$ ，使得对于任意 $m, n > N$ ，均有 $|x_m - x_n| < \epsilon$ 。

和通过极限定义来判断收敛相比，柯西准则的优点在于可以在不需要预先知道极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 之具体值的前提下来判断一个数列是否收敛。

比如，考虑级数 （下面的 $:=$ 代表定义为）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} := \lim_{n\to\infty} S_n \text{，其中 } S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \text{。}$$

柯西准则（ Cauchy Criterion ）

对于上面的级数，事实是：当 $p > 1$ 的时候，级数都是收敛的（换言之，极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 都是存在的）。但是，对于 $p > 1$，我们一般是不知道 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 的具体值的。比如，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.1}} = ?$$

根据柯西准则，我们仍然直接可以得出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.1}}$ 的收敛性。具体步骤如下（不妨假设 $m > n > 1$）：

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^{2.1}} \le \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^{2}} < \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

柯西准则（ Cauchy Criterion ）

注意到

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n-1} ,$$

对于任意 $\epsilon>0$ ，取

$$N=\lceil\frac{1}{\epsilon}\rceil+1 ,$$

则对于任意 $m,n\in\mathbb{N}_{\geq N}$ （不妨假定 $m>n>1$ ），我们有

$$|S_m-S_n|<\epsilon 。$$

故 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在。

柯西准则：完备性、完备化

关于柯西准则，其完整的名字应为"$\mathbb{R}$ 上的柯西准则"。内容如下：

"给定 $\mathbb{R}$ 中数列 $x_1, x_2, \cdots$ 。如果对于任意 $\epsilon \in \mathbb{R}_+$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $m, n \in \mathbb{N}_{>N}$，均有 $|x_m - x_n| < \epsilon$，则一定存在 $A \in \mathbb{R}$，使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ 。"

若将上面的所有 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{Q}$，我们不再有所谓的柯西准则（判别法）。例如，对于无理数 π，定义

$$x_n = \lfloor 10^n \cdot \pi \rfloor / 10^n 。$$

则数列 $x_1, x_2, \cdots$ 是一个 $\mathbb{Q}$ 中的数列，并且容易验证该数列是柯西列。但是并不存在有理数 A，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 。}$$

这就是 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 的区别。在 $\mathbb{R}$ 中，任意的柯西列都收敛到 $\mathbb{R}$ 中的某个元素，但是 $\mathbb{Q}$ 中的柯西列未必收敛到 $\mathbb{Q}$ 中 (具体参见上面的例子) 。 用更数学的语言来说，$\mathbb{Q}$ 关于其上的距离结构是非完备的，而 $\mathbb{R}$ 关于其上的距离结构是完备的。

为什么会有这样的区别? 在某种意义上说，这和实数的定义有关。回顾前面 [Part 2] 中内容，我们首先通过 Peano 公理引入了自然数 $\mathbb{N}$ ，然后通过对 $(\mathbb{N}, +)$ 做 Grothendieck 化得到了整数 $\mathbb{Z}$ 。接着，通过对 $(\mathbb{Z} - \{0\}, \times)$ 做 Grothendieck 化得到了有理数 $\mathbb{Q}$ 。

柯西准则：完备性、完备化

在前面的课上和习题中，我们也定义了 $\mathbb{Q}$ 上的距离结构。但是，我们之前并没有给出实数 $\mathbb{R}$ 的严格定义。

事实上，一种关于 $\mathbb{R}$ 的定义就是：$\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 关于其上距离的完备化 ($\mathbb{R}$ is the completion of $\mathbb{Q}$)。

前面的例子说明，$\mathbb{Q}$ （关于其上距离）是非完备的。如何对其进行完备化呢？这里假定我们只知道 $\mathbb{Q}$ 的定义，并不知道实数 $\mathbb{R}$ 的定义。事实上，我们在试图给出实数 $\mathbb{R}$ 的定义！

基于 $\mathbb{Q}$ 上的距离结构，我们可以定义 $\mathbb{Q}$ 上的柯西列。我们说 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \subset \mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的柯西列，如果对于任意 $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意满

柯西准则：完备性、完备化

足 $m, n > N$ 且 $m, n \in \mathbb{N}$，均有
$$|x_m - x_n| < \epsilon 。$$

用 $\mathcal{Q}$ 代表上面定义的所有 $\mathbb{Q}$ 上柯西列构成的集合。如果 $f \in \mathcal{Q}$，则 $f(1), f(2), \cdots$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的柯西列（这里我们用 $f(n)$ 代表数列 f 的第 n 个元素）。

在 $\mathcal{Q}$ 上，我们定义关系 $\sim$ 如下：$f \sim g$ 如果 $\lim_{n\to\infty} f(n) - g(n) = 0$。换言之，我们说 $f \sim g$，如果对于任意 $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意满足 $n > N$ 的自然数 n，均有 $|f(n) - g(n)| < \epsilon$。

练习：验证 $\sim$ 满足自反性、对称性和传递性，从而是个等价关系。

柯西准则：完备性、完备化

用 $\mathcal{R}$ 代表 $\mathcal{Q}$ 在上述等价关系 $\sim$ 下的等价类。记为

$$\mathcal{R} = \mathcal{Q}/\sim \quad ,$$

读作 $\mathcal{R}$ 等于 $\mathcal{Q}$ 模上 等价关系。

相应的，对于 $\mathsf{f} \in \mathcal{Q}$，我们用 $[\mathsf{f}]$ 来代表 f 所对应的等价类。例如，对于数列

$$\mathsf{f} = (0, 0, 0, 0, \cdots), \ \ \mathsf{g} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots) \quad ,$$

我们有 $\mathsf{f} \sim \mathsf{g}$，从而 $[\mathsf{f}] = [\mathsf{g}]$。

在 $\mathcal{R}$ 上，我们定义加法、乘法以及序关系等结构。

$[\mathsf{f}]+[\mathsf{g}] := [\mathsf{f}+\mathsf{g}]$, 其中 $(\mathsf{f}+\mathsf{g})(\mathsf{n}) = \mathsf{f}(\mathsf{n})+\mathsf{g}(\mathsf{n}) \ \forall\, \mathsf{n} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

柯西准则：完备性、完备化

$$[f]\cdot[g]:=[f\cdot g],\ \ 其中(f\cdot g)(n)=f(n)\cdot g(n)$$

为了说明上面的加法和乘法是良性定义的，需要做一些验证性的工作。

练习：若 f 和 g 均为 $\mathbb{Q}$ 中的柯西列，证明 $f+g$ 仍然是 $\mathbb{Q}$ 中的柯西列。换言之，若 $f,g\in\mathcal{Q}$，证明 $f+g\in\mathcal{Q}$。

练习：若 f 和 g 均为 $\mathbb{Q}$ 中的柯西列，证明 $f\cdot g$ 仍然是 $\mathbb{Q}$ 中的柯西列。换言之，若 $f,g\in\mathcal{Q}$，证明 $f\cdot g\in\mathcal{Q}$。提示：先证明柯西列都是有界的。

柯西准则：完备性、完备化

练习：验证上述 $\mathcal{R}$ 上加法和乘法的定义，与等价类中代表元 f 和 g 的选取无关。

下面我们来定义 $\mathcal{R}$ 上的序关系。

对于 $[f],[g]\in\mathcal{R}$，我们说 $[f]\le[g]$，如果对于任意 $\epsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对于任意满足 $n>N$ 的自然数 n，均有 $f(n)\le g(n)+\epsilon$。注意，我们给出的是个看似麻烦的定义，而不是简单直观的将 $[f]\le[g]$ 定义为 $\lim_{n\to\infty}f(n)-g(n)\le 0$，为什么？ There is REALLY some math here!!! （提示：我们现在只知道自然数 $\mathbb{Q}$ 和其上的相关结构！）

柯西准则：完备性、完备化

可以验证，上面定义的 $\mathcal{R}$ 上的 $\leq$ 关系，满足自反性、反对称性和传递性，从而是个（偏）序关系。这些验证，不是很难，也不是很平凡，建议作为练习自行完成。

类似于加法，我们也可以定义 $\mathcal{R}$ 上的减法。结合 $\mathcal{R}$ 上的减法和序关系，我们定义 $\mathcal{R}$ 上的距离结构如下：对于任意 $[f],[g] \in \mathcal{R}$，定义它们之间的距离为

$$\big|[f]-[g]\big| := \begin{cases} [f]-[g], & [g] \leq [f] \\ [g]-[f]. & \text{else} \end{cases}$$

该距离也可记为 $d([f],[g])$ 。

柯西准则：完备性、完备化

关于上述定义的 $\mathcal{R}$ 上之距离，可以验证，其满足

0) [非负] 对于任意 $[\mathsf{f}],[\mathsf{g}]\in\mathcal{R}$，$\mathsf{d}([\mathsf{f}],[\mathsf{g}])\geq 0$，换言之，$0\leq\mathsf{d}([\mathsf{f}],[\mathsf{g}])$。这里 0 定义为 $[\mathsf{h}]$，而 h 满足 $\mathsf{h}(\mathsf{n})=0\ \forall\,\mathsf{n}\in\mathbb{N}_{\geq 1}$

1) $\mathsf{d}([\mathsf{f}],[\mathsf{g}])=0$ 当且仅当 $[\mathsf{f}]=[\mathsf{g}]$，这里 0 之定义同上。

2) [对称性] $\forall\,[\mathsf{f}],[\mathsf{g}]\in\mathcal{R},\quad \mathsf{d}([\mathsf{f}],[\mathsf{g}])=\mathsf{d}([\mathsf{g}],[\mathsf{f}])$

3) [三角不等式] $\forall\,[\mathsf{f}],[\mathsf{g}],[\mathsf{h}]\in\mathcal{R}$，

$$\mathsf{d}([\mathsf{f}],[\mathsf{h}])\leq\mathsf{d}([\mathsf{f}],[\mathsf{g}])+\mathsf{d}([\mathsf{g}],[\mathsf{h}])$$

柯西准则：完备性、完备化

上述 0) 到 3) 的验证，并不都是很平凡的。有的验证是非常好的关于数列（这里是 $\mathbb{Q}$ 中数列）极限性质的基本训练。建议自行给出上述 0) 到 3) 的完整验证。

下面我们定义 $\mathcal{R}$ 上的除法。对于任意 $[\mathsf{f}],[\mathsf{g}]\in\mathcal{R}$，其中 $[\mathsf{g}]\neq 0$ （这里 0 的定义同上），我们试图这样定义：

$$\frac{[\mathsf{f}]}{[\mathsf{g}]}:=[\mathsf{h}]\ \text{其中}\ \mathsf{h}(\mathsf{n})=\frac{\mathsf{f}(\mathsf{n})}{\mathsf{g}(\mathsf{n})}\ \forall \mathsf{n}\in\mathbb{N}_{\geq 1}\ 。$$

这样会有个问题：$[\mathsf{g}]\neq 0$ 并不能确保对于任意的 $\mathsf{n}\in\mathbb{N}_{\geq 1}$，均有 $\mathsf{g}(\mathsf{n})\neq 0$。因此 $\frac{\mathsf{f}(\mathsf{n})}{\mathsf{g}(\mathsf{n})}$ 并不是对于所有的 n 都是可以定义的。

柯西准则：完备性、完备化

上述的问题是不难解决的。注意到 $[\mathsf{g}]$ 是在 $\mathbb{Q}$ 上柯西列的等价类中。在这样的等价类中，两个柯西列 g 和 g'，只要在 $\mathsf{n}\to\infty$ 这一端“行为一致”，就可以认为是等价的。换言之，对于两个序列 $\mathsf{g}(1),\mathsf{g}(2),\cdots$ 和 $\mathsf{g}'(1),\mathsf{g}'(2),\cdots$ ，如果它们除了有限个例外之外，均有 $\mathsf{g}(\mathsf{n})=\mathsf{g}'(\mathsf{n})$ ，则我们可以认为（在“极限意义”下）g 和 g' 是一样的。

性质： 对于 $[\mathsf{g}]\in\mathcal{R}$ ，若 $[\mathsf{g}]\neq 0$ （这里 $\mathcal{R}$ 中元素 0 的定义同上），则一定存在 $\delta\in\mathbb{Q}_{>0}$ 和 $\mathsf{N}\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ ，使得对于任意自然数 $\mathsf{n}>\mathsf{N}$ ，均有

$$|\mathsf{g}(\mathsf{n})|>\delta\ 。$$

证明：我们使用反证法。假定不成立，则对于任意 $\delta \in \mathbb{Q}_{>0}$，任意 $\mathsf{N} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，一定存在自然数 $\mathsf{n} > \mathsf{N}$，使得 $|\mathsf{g}(\mathsf{n})| \leq \delta$。取 $\delta = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots$，则我们可以得到子列 $\mathsf{g}(\mathsf{n}_\mathsf{k})$，满足（在 $\mathbb{Q}$ 中）

$$\lim_{\mathsf{k}\to\infty} \mathsf{g}(\mathsf{n}_\mathsf{k}) = 0\ 。$$

在 $\mathcal{R}$ 中，注意到 $[\mathsf{g}] \neq 0$。故而存在 $\epsilon_0 \in \mathbb{Q}_{>0}$，使得对于任意 $\mathsf{N}_0 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，存在自然数 $\mathsf{n} > \mathsf{N}_0$，满足 $|\mathsf{g}(\mathsf{n})| \geq \epsilon_0$。

由于 $\lim_{\mathsf{k}\to\infty} \mathsf{g}(\mathsf{n}_\mathsf{k}) = 0$，对于 $\epsilon_0/2 \in \mathbb{Q}_{>0}$，存在 $\mathsf{K} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，使得对于任意 $\mathsf{k} > \mathsf{K}$，均有 $|\mathsf{g}(\mathsf{n}_\mathsf{k})| < \epsilon_0/2$。

柯西准则：完备性、完备化

下面我们来说明：对于任意 $\mathsf{M} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，存在自然数 m, n，满足 $\mathsf{m}, \mathsf{n} > \mathsf{M}$ 并且 $|\mathsf{g}(\mathsf{m}) - \mathsf{g}(\mathsf{n})| > \epsilon_0/2$。这样就与 g 是 $\mathbb{Q}$ 中柯西列矛盾。

对于任意给定的 $\mathsf{M} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，令 $\mathsf{N}_0 = \mathsf{M}$，则存在 $\mathsf{n} > \mathsf{N}_0$，满足 $|\mathsf{g}(\mathsf{n})| \geq \epsilon_0$。由于 $\mathsf{M} + \mathsf{K} > \mathsf{K}$，故而 $|\mathsf{g}(\mathsf{n}_{\mathsf{M}+\mathsf{K}})| < \epsilon_0/2$。令 $\mathsf{m} = \mathsf{n}_{\mathsf{M}+\mathsf{K}}$。由于 $\mathsf{n}_{\mathsf{M}+\mathsf{K}} \geq \mathsf{M} + \mathsf{K}$ （为什么？），故 $\mathsf{m} \geq \mathsf{M} + \mathsf{K} > \mathsf{M}$。

至此，我们找到了自然数 m, n，满足 $\mathsf{m}, \mathsf{n} > \mathsf{M}$，并且 $|\mathsf{g}(\mathsf{m})| < \epsilon_0/2$，$|\mathsf{g}(\mathsf{n})| \geq \epsilon_0$。从而

$$|\mathsf{g}(\mathsf{m}) - \mathsf{g}(\mathsf{n})| > \epsilon_0/2 \text{。}$$

这与 g 为 $\mathbb{Q}$ 中柯西列矛盾，故假设错误。证毕。 $\square$

柯西准则：完备性、完备化

基于上述性质，我们可以定义 $\mathcal{R}$ 中除法如下： 假定 $[f],[g]\in\mathcal{R}$ 且 $[g]\neq 0$ 。则我们不妨假定对于任意 $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ ， $g(n)\neq 0$ 。据此，

$$\frac{[f]}{[g]}:=[h] \text{ 其中 } h(n)=\frac{f(n)}{g(n)} \ \forall n\in\mathbb{N}_{\geq 1} \text{ 。}$$

至此，我们在 $\mathcal{R}$ 上定义了加法、减法、乘法、除法、序关系以及距离结构。下面，我们来说明 $\mathcal{R}$ 中“包含”了有理数 $\mathbb{Q}$ 。

定义 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathcal{R}$ 的映射 ι 如下：

$$\iota:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathcal{R},\ \ x\mapsto[(x,x,x,\cdots)] \text{ 。}$$

柯西准则：完备性、完备化

练习： 证明上述 ι 是单射，但不是满射。

练习： 对于任意 $x, y \in \mathbb{Q}$ ，证明：

1) $\iota(x+y) = \iota(x) + \iota(y)$

2) $\iota(x \cdot y) = \iota(x) \cdot \iota(y)$

3) [额外假定 $y \neq 0$] $\iota(x/y) = \iota(x)/\iota(y)$

4) 若 $x \leq y$ ，则 $\iota(x) \leq \iota(y)$

5) $|x - y| = |\iota(x) - \iota(y)|$

注： 将实数 $\mathbb{R}$ 定义为 $\mathcal{R}$ ，我们就通过 $\mathbb{Q}$ 的完备化，得到实数严格定义。这样实数自然就是完备的。

一致连续和集合的紧性

如果函数 $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，则 f 一定是一致连续的。这是《数学分析》中关于连续函数的一个基本事实。 我们这里通过开覆盖之有限子覆盖（涉及到紧集的概念）的方法，给出关于这个事实的令一个角度的看法。

对于任意给定的 $\epsilon > 0$ ，由于 f 在 $[a,b]$ 上处处连续，对于任意 $x \in [a,b]$ ，存在 $r_x \in \mathbb{R}_{>0}$ ，使得对于任意 $y \in (x - r_x, x + r_x)$ ，均有

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon/2 \text{ 。}$$

注意如下事实：

$$[a,b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} (x - r_x, x + r_x) \text{ 。}$$

换言之，所有这些开集 $(x-r_x, x+r_x)$ 给出了 $[a,b]$ 的一个开覆盖（用开集盖满）。

问题：能否找到上述开集中的有限多个，使得这些有限多个开集仍然覆盖了 $[a,b]$？

定义：在拓扑空间 X 上，我们说 X 的子集 D 是紧集，如果 D 的任意开覆盖都存在有限的子覆盖。

事实：$\mathbb{R}^n$ 中的子集 D 是紧集，当且仅当 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集。

一致连续和集合的紧性

根据上述的定义和事实，存在 $x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$，使得

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i})。$$

对于 $\mathbb{R}$ 上的有限个开区间 $(x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i})$，一定存在 $\delta > 0$，使得只要 $|x - y| < \delta$，则 x, y 一定同属于某一个开区间（为什么？）。不妨假定

$$x, y \in (x_s - r_{x_s}, x_s + r_{x_s})。$$

则

$$|f(x) - f(x_s)| < \delta/2 \text{ 且 } |f(y) - f(x_s)| < \delta/2。$$

一致连续和集合的紧性

根据三角不等式，可得

$$|f(x) - f(y)| < \delta \text{ 。}$$

至此，我们证明了对于 $[a,b]$ 上的连续函数 f，对于任意 $\epsilon > 0$，一定存在 $\delta > 0$，使得任意 $x, y \in [a,b]$ 只要满足 $|x-y| < \delta$，则 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$。换言之，$[a,b]$ 上的连续函数一定是一致连续的。

根据我们的论述，只要 D 是 $\mathbb{R}$ 中的有界闭集（从而是紧的），则对于 D 上的连续函数 f，对于任意 $\epsilon > 0$，一定存在 $\delta > 0$，使得任意 $x, y \in D$ 只要满足 $|x-y| < \delta$，则 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$。换言之，R 中有界闭集上的连续函数一定是一致连续的。

一致连续和集合的紧性

练习： 对于 $\mathbb{R}$ 中的子集 D，如果 D 不是有界的，或者 D 不是闭集，则 D 上的连续函数 f 未必是一致连续的。试分别给出例子。

注： 对于一般的 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集 D 上的连续函数，类似的结果是成立的。一般情形 $\mathbb{R}^n$ 的证明要稍微复杂一些。事实是，一般的 $\mathbb{R}^n$ 情形和我们上述的 $\mathbb{R}$ 下之情形是有一点区别的。比如，在 $\mathbb{R}^2$ 中，令 A 为所有与 $(0,0)$ 之距离严格小于 1 的点所构成的集合（开圆盘），令 B 为所有与 $(\frac{1}{2},0)$ 之距离严格小于 1 的点所构成的集合（开圆盘）。则存在

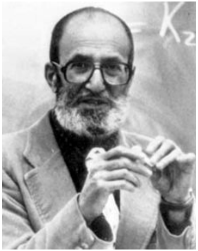
$$x_1, x_2, \cdots \in A \cup B, \quad y_1, y_2, \cdots \in A \cup B \quad ,$$

满足

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n) \longrightarrow 0 \quad ,$$

但是对于任意的 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，$x_n$ 和 y_n 不同时在 A 中，也不同时在 B 中。

The complete quote of P. R. Halmos



P. R. Halmos

1916 – 2006

Don't just read it; fight it! Ask your own question, look for your own examples, discover your own proofs. Is the hypothesis necessary? Is the converse true? What happens in the classical special case? What about the degenerate cases? Where does the proof use the hypothesis?

What is analysis for? What is math for?

朱泙漫学屠龙于支离益，单千金之家，三年技成而无所用其巧。

– 《庄子·列御寇》

数学专业学生以后会经常遇到的问题之一就是：纯数学（理论数学）有什么用？

扎实而正规的数学训练可以培养逻辑思维能力、分析能力、顽强的作风、以及潜意识中思考的能力。这些能力的培养，对于做任何事情，都是极有帮助的。理论数学所训练的东西，如果真正掌握（而不是死记硬背），是日常生活、学习和工作中都能用上的，绝非空洞无用的屠龙之技。